

# Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

## IV-1- Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. Elle connaît, depuis 1970 environ, une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de la puissance des micros ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, de calcul et de conception de l'ingénieur dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants.

Ce développement s'est accompagné de la mise au point de programmes de calcul capables de résoudre des problèmes d'une grande complexité. Mais pour l'utilisateur, il s'agit souvent de boîtes noires. Ainsi, il est aujourd'hui courant de réaliser, pour des grands projets, des analyses par éléments finis afin de vérifier la stabilité d'un ouvrage en interaction avec son environnement.

L'évolution de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Pour réaliser ces projets et vu la complexité des méthodes analytiques ou leur inexistence, l'ingénieur a recours aux méthodes qui permettent de simuler le comportement des systèmes physiques complexes. La méthode des éléments finis est devenue éventuellement la plus performante des méthodes numériques, vu son grand champ d'application.

La méthode des éléments finis met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base:

- a- La mécanique de structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité,....etc.
- b- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires,....etc.
- c- L'informatique appliquée : techniques de développement et de la maintenance de grands logiciels.

# Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

## IV-2- État de contraintes-déformations:

### État de contraintes-déformations dans le cas élastique:

On considère un matériau isotrope, élastique linéaire et donc la relation contrainte-déformation s'écrit:

$$\sigma_{ij} = E \cdot \varepsilon_{ij} \quad \dots\dots\dots \quad (IV-1)$$

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être divisés en deux groupes distincts, les problèmes de contraintes planes et les problèmes de déformations planes. Dans le premier cas, la structure a une petite épaisseur par rapport à ses autres dimensions et, les contraintes normales au plan sont négligées, tandis que dans le deuxième cas la structure a une dimension très grande par rapport à ses autres dimensions et la déformation normale au plan de la charge est nulle (le cas des barrages en béton figure IV-1).

### Relation contrainte-déformation :

$$\sigma_{ij} = D \cdot \varepsilon_{ij} \quad (IV.2)$$

Avec : D est la matrice d'élasticité, s'exprime par

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, d_2 = \nu \cdot d_1, d_3 = \frac{1}{2}(d_1 - d_2)$$

E et  $\nu$  sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau.

Et :

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ji} & \sigma_{jj} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (IV.3)$$

Avec :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

La figure IV-2 représente les contraintes principales sur un petit élément dans le cas des déformations planes.

## Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

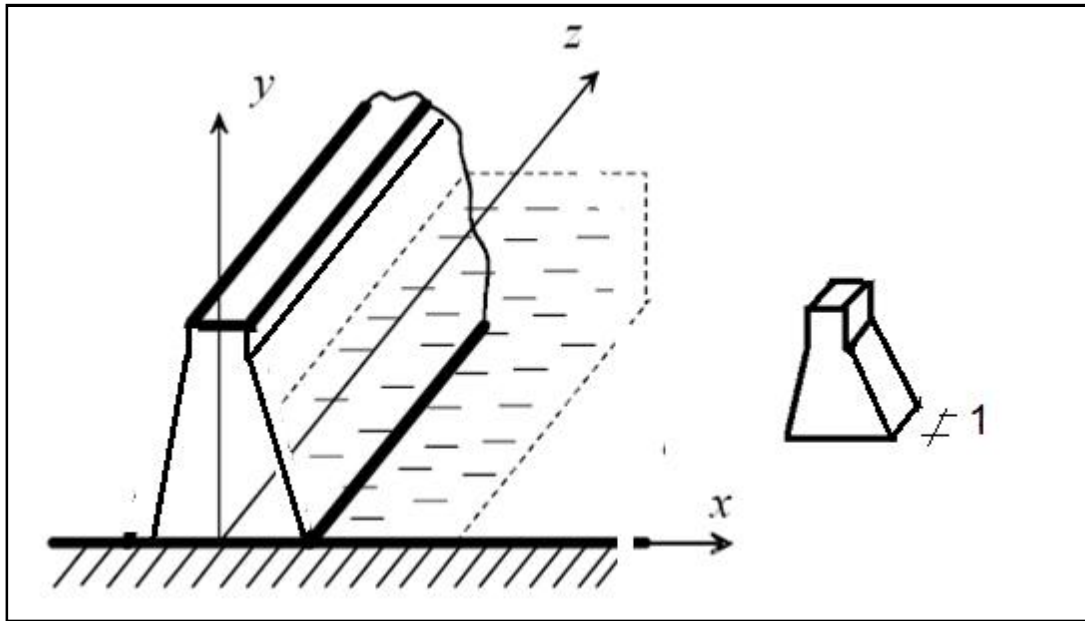


Figure IV-1- Conditions de déformation plane (exemple d'un barrage en béton).

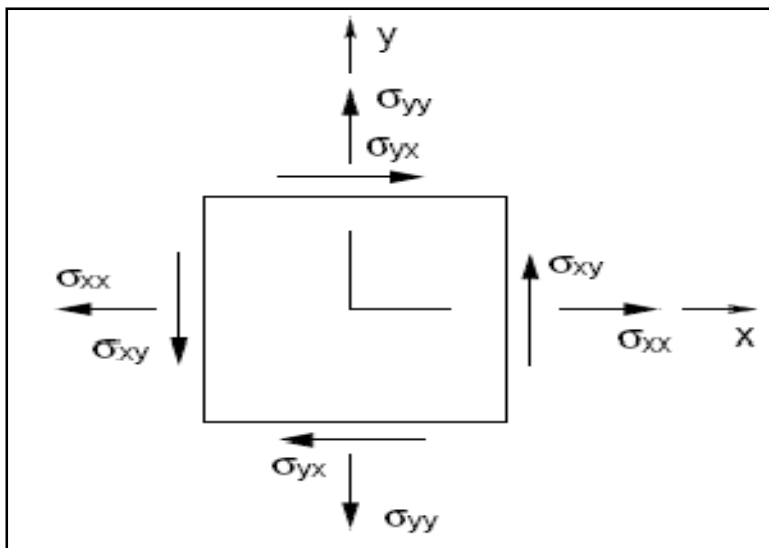


Figure IV-2- Représentation des contraintes sur un petit élément dans le cas des déformations planes :

Tel que, les contraintes normale et tangentielle sont exprimé par :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (\text{IV.4})$$

$$\tau_{max} = \sigma_3 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (\text{IV.5})$$

## Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

Le tenseur des déformations est :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ii} & \frac{1}{2}\gamma_{ij} \\ \frac{1}{2}\gamma_{ji} & \varepsilon_{jj} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Avec :  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$

**La relation déformations-déplacements :**

$$\varepsilon_{ij} = S \cdot U_{ij} \quad (\text{IV.7})$$

Avec :

$$U_{ij} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

### IV-3- Application de la méthode des éléments finis :

#### IV-3-1- Modélisation :

##### a- Modélisation du système barrage-fondation :

Le système à étudier est constitué par un barrage en béton, supporté par une surface horizontale d'un milieu élastique plan, cette dernière est limitée en profondeur par la base rocheuse horizontale.

L'accélération est appliquée à la base de la fondation.

##### \* **Barrage :**

Dans notre cas le barrage est représentés par un maillage d'élément finis, le matériau constituant le barrage est considéré homogène, élastique et isotrope dans notre cas de l'analyse linéaire.

##### \* **Fondation :**

La fondation limitée par une surface horizontale rigide, a été aussi modélisée en élément finis de même type que le barrage et de même type de matériau.

# Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

## b- Choix de type d'élément :

Un type d'élément est utilisé pour la modélisation du système fondation-barrage :

- \* Elément finis quadratique à quatre nœuds.

## \* Conditions aux frontières:

Généralement, les barrages sont traités comme un système bidimensionnel dans lequel on considère un comportement planaire, le barrage et le sol de fondation sont considérés comme deux sous structures du système combiné, représentés par un maillage d'éléments finis bidimensionnel, chaque nœud libre de l'élément fini considéré possède deux degrés de liberté ( $U_x, U_y$ ).

Pour simplifier le traitement des nœuds des extrémités latérales, dans le cas d'un séisme de direction horizontale, on suppose que ces points sont libres de se déplacer dans le sens horizontal, mais non dans le sens vertical, et dans le cas de séisme vertical on a le contraire.

## IV-3-2- Analyse dynamique :

### a-Formulation générale des équations de mouvement par la méthode des éléments finis:

Un solide déformable est en équilibre si le travail virtuel des forces extérieur est inférieur au travail virtuel forces intérieur, l'expression du principe des travaux virtuels peut être obtenue par application de la formulation variation elle (intégrale) aux équations de mouvements.

En prenant comme fonction poids  $\Psi = \delta U$

$$W = \int_{\Omega} \delta U_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i) d\Omega \quad (IV.9)$$

Après plusieurs étapes on obtient alors l'expression des travaux virtuels suivante :

$$W = - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} \delta U \cdot \sigma \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta U \cdot f \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \delta U \cdot \rho \cdot \ddot{U} \cdot d\Omega = 0 \quad (IV.10)$$

Ou :

$$w_{int} = - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot d\Omega \quad : \text{Travail virtuel intérieur.}$$

$$w_s = \int_{\Gamma} \delta U \cdot \sigma \cdot \vec{n} d\Gamma \quad : \text{Travail virtuel des forces de surface}$$

$$w_v = \int_{\Omega} \delta U \cdot f \cdot d\Omega \quad : \text{Travail virtuel des forces de volume.}$$

$$w_w = - \int_{\Omega} \delta U \cdot \rho \cdot \ddot{U} \cdot d\Omega \quad : \text{Travail virtuel des forces d'inertie.}$$

## Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

Dans le cas du barrage l'expression devient :

$$W = -\int_{\Omega_s} \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_{am}} \delta U \cdot (-p) \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega_s} \delta U \cdot \rho \cdot r \cdot \ddot{U}_g \cdot d\Omega - \int_{\Omega_s} \delta U \cdot \rho \cdot \ddot{U} \cdot d\Omega = 0 \quad (IV.11)$$

Tel que :

$\ddot{U}_g$ : Accélération sismique

$r$  : Vecteur de couplage dynamique qui relie la direction du mouvement avec la direction de chaque degré de liberté.

Caractéristiques des éléments (matrices élémentaires) :

En appliquant le principe des travaux virtuels sur un sous domaine  $\Omega_e$  et en remplaçant les termes contraintes par les produits  $D^* \varepsilon$ , on a :

\* **Matrice de rigidité :**

$$k_e = \int_{\Omega} [B]^t [D] [B] d\Omega_e \quad (IV.12)$$

\* **Matrice masse :**

$$M = \int_{\Omega_e} N^t \rho \cdot N d\Omega_e \quad (IV.13)$$

C'est l'expression de la matrice masse non condensée (cohérente), qui caractérise l'inertie de la structure. Elle peut être exprimée sous forme condensée (matrice diagonale) si l'on opte pour le concept de la condensation de la masse sur les nœuds.

L'expression explicite est :

$$M_{jj} = \int_{\Omega_e} \rho \cdot N_j \cdot d\Omega_e \quad (\text{Pour le cas de masse concentrée}). \quad (IV-14)$$

$I$  : matrice identité

\* **Vecteur chargement sismique:**

$$F_i = M \cdot I \cdot \ddot{U}_g \quad (IV-15)$$

**b- Caractéristiques dynamique du système :**

\* **Matrice de raideurs :**

La matrice de raideurs est obtenue par une simple procédure d'assemblage des matrices élémentaires. Le système pouvant être représenté par deux sous-structures liées entre elles par des nœuds communs dits nœuds d'interfaces, on peut alors écrire les matrices de raideurs de chaque partie barrage ou fondation séparément, puis procéder à l'assemblage des deux sous

## Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

matrices obtenues, afin d'obtenir la matrice de raideurs du système global en utilisant pour cela la méthode des sous-structures.

Les matrices de raideurs pour les deux sous-structures, barrage et fondation, sont données par :

$$K_b = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{ib} & 0 \\ K_{ib} & K_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22}) \quad \text{et} \quad K_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii} & K_{if} \\ 0 & K_{fi} & K_{ff} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-16})$$

i : Indice des nœuds de l'interface barrage-fondation.

b : Indice des nœuds de barrage.

f : Indice des nœuds de la fondation.

Après assemblage des deux sous matrices correspondant à chaque sous structure, et compte tenu des degrés de liberté d'interface, la matrice globale prend la configuration suivante :

$$K = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} & 0 & 0 \\ K_{ib} & K_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ii} & K_{if} \\ 0 & 0 & K_{fi} & K_{ff} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-17})$$

### \* **Matrice masse :**

Le même principe est utilisé pour la construction de la matrice masse globale. Sauf que dans le cas de la présence de l'eau dans la retenue du barrage, la matrice masse contient des valeurs ajoutées aux nœuds de contacts avec l'eau, ces valeurs sont calculées en fonction de la surface tributaire à chaque nœuds.

$$[M_b] = \begin{bmatrix} m_{bb} & m_{bi} & 0 \\ m_{ib} & m_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25}), \quad [M_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{ii} & m_{if} \\ 0 & m_{fi} & m_{ff} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-18})$$

Après assemblage de ces deux sous matrices correspondant à chaque sous domaine, la matrice globale prend la configuration suivante :

$$[M] = [M_b] + [M_f] = \begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} & 0 & 0 \\ M_{ib} & M_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{ii} & M_{if} \\ 0 & 0 & M_{fi} & M_{ff} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-19})$$

## Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

### \* **Matrice d'amortissement :**

L'amortissement dans une structure ou dans le sol est une réalité physique essentiellement liée à la plastification des matériaux. Selon les phénomènes physiques mis en cause on distingue plusieurs types d'amortissements :

- \* L'amortissement visqueux pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse.
- \* L'amortissement hystérétique pour lequel la force d'amortissement est proportionnel au déplacement et a un signe opposé à celui de la vitesse.
- \* L'amortissement de coulomb, qui correspond à un amortissement de frottement ou la force d'amortissement est proportionnelle à la force de réaction normale à la direction de déplacement et a aussi un signe opposé à celui de la vitesse.

En pratique il est généralement impossible de définir la matrice de viscosité  $\mu$  nécessaire à la détermination de la matrice d'amortissement  $C$ .

L'amortissement de Rayleigh qui exprime la matrice d'amortissement sous forme d'une combinaison linéaire de la matrice masse  $M$  et de la matrice de rigidité  $K$  est communément utilisé :

$$C = \alpha_R M + \beta_R K \quad (IV-20)$$

$\alpha_R, \beta_R$  : Sont des coefficients satisfaisants la condition d'orthogonalité de  $C$  dans la base modale. Ils peuvent être déterminés à partir de l'analyse modale de la structure en prenant deux pulsations propres de deux modes distincts.

$$\begin{Bmatrix} \alpha_R \\ \beta_R \end{Bmatrix} = \frac{2 \cdot \xi}{W_1 + W_n} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \cdot W_n \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (IV-21)$$

Avec :

$W_1$  : Pulsation propre du premier mode.

$W_n$  : Pulsation propre d'un mode supérieur.

$\xi$  : Taux d'amortissement critique.

Les matrices d'amortissement pour les deux sous structures barrage-fondation, sont calculées par la relation :

#### • **Barrage :**

$$[C_b] = \alpha_{Rb} [M_b] + \beta_{Rb} [K_b] \quad (IV-22)$$

$$[C_b] = \begin{bmatrix} C_{bb} & C_{bi} & 0 \\ C_{ib} & C_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.23)$$

#### • **Fondation :**

$$[C_f] = \alpha_{Rf} [M_f] + \beta_{Rf} [K_f] \quad (IV.24)$$



## Chapitre IV : Modélisation du barrage par la méthode des Eléments Finis.

$$[C_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{ii} & C_{if} \\ 0 & C_{fi} & C_{ff} \end{bmatrix} \quad (IV.25)$$

Alors la matrice d'amortissement globale est obtenue par un assemblage des matrices d'amortissement correspondant à chaque sous structure :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{bb} & C_{bi} & 0 & 0 \\ C_{ib} & C_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{ii} & C_{if} \\ 0 & 0 & C_{fi} & C_{ff} \end{bmatrix} \quad (IV.26)$$

### c- Résolution de problème:

La méthode de résolution la mieux adaptée, ou la plus efficace, dépend du comportement de l'ouvrage à étudier (linéaire ou non linéaire) et du mode de définition de la sollicitation appliquée (temporelle, fréquentielle). Il convient de réaliser que dans la plupart des applications pratiques, l'obtention d'une solution analytique est inaccessible et que le recours à des méthodes numériques se révèle indispensable.

#### \* Méthodes d'intégration directe:

Dans ces méthodes, on discrétise le temps en certain nombre de pas (ou intervalles) de taille et On pose une interpolation à l'intérieur de chaque intervalle, ce qui limite la résolution de l'équation du mouvement (initialement continu) à la fin de chaque pas de temps.

Deux grandes familles sont bien connues :

- \* Méthodes explicites : différences finies centrées.
- \* Méthodes implicites : Newmark, Wilson, Park.

Pour résoudre notre problème à l'aide du software ANSYS, on utilise l'Algorithme de Newmark.